Носков С. И., Медведев А. П.
S. I. Noskov, A. P. Medvedev

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОДНОРОДНОЙ ВЛОЖЕННОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ ВТОРОГО ТИПА

ESTIMATION OF PARAMETERS OF HOMOGENEOUS NESTED PIECEWISE LINEAR REGRESSION OF THE SECOND TYPE

Носков Сергей Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные системы и защита информации» Иркутского государственного университета путей сообщения (Россия, Иркутск); 664074, Россия, г. Иркутск, ул. Чернышевского, д. 15; тел. 8(914)902-24-94. E-mail: sergey.noskov.57@mail.ru.
Sergey I. Noskov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Information Systems and Information Protection Department, Irkutsk State University of Railway Transport (Russia, Irkutsk); 664074, Russia, Irkutsk, st. Chernyshevsky, 15; tel. 8(914)902-24-94. E-mail: sergey.noskov.57@mail.ru.

Медведев Александр Петрович – аспирант кафедры «Информационные системы и защита информации» Иркутского государственного университета путей сообщения (Россия, Иркутск); 664074, Россия, г. Иркутск, ул. Чернышевского, д. 15; tel. 8(908)663-16-63. E-mail: medvedeff.a.p@yandex.ru.
Aleksandr P. Medvedev – Postgraduate Student, Information Systems and Information Security Department, Irkutsk State Transport University (Russia, Irkutsk); 664074, Russia, Irkutsk, Chernyshevsky St., 15; tel. 8(908)663-16-63. E-mail: medvedeff.a.p@yandex.ru.

Аннотация. В работе дан краткий обзор результатов использования нелинейных конструкций при регрессионном моделировании сложных систем. В частности, рассмотрены нелинейная регрессионная модель для аппроксимации кривой мощности ветряных турбин, нелинейная множественная модель для оценки хрупкости горных пород, нелинейная регрессия для прогнозирования краткосрочных нагрузок в системах охлаждения общественных зданий, методы оценки большой выборки для нелинейной регрессионной модели. Решена задача расчёта оценок параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессионной модели второго типа на основе применения метода наименьших модулей, которая сведена к задаче линейно-булева программирования с приемлемой для реальных практических ситуаций размерностью. Формирование состава задаваемых при этом индексных множеств является исключительной прерогативой разрабатывающего конкретную регрессионную модель исследователя, который использует для этого соответствующие теоретические и содержательные соображения, вытекающие из смысла задействованных независимых переменных. Полученные значения булевых переменных указывают на порядок срабатывания внешнего и внутренних максимумов в рассматриваемой вложенной модели. Решён иллюстративный пример.

Summary. The paper provides a brief overview of the results on the use of nonlinear structures in regression modeling of complex systems. In particular, the following issues are considered: a nonlinear regression model for approximating the wind turbine power curve; a nonlinear multiple model for assessing the fragility of rocks; nonlinear regression for predicting short-term loads in cooling systems of public buildings; methods for assessing a large sample for a nonlinear regression model. The problem of calculating the parameter estimates of a homogeneous nested piecewise linear regression model of the second type based on the application of the least absolute values method is reduced to a linear Boolean programming problem with a dimension acceptable for real practical situations. The formation of the composition of the index sets specified in this case is the exclusive prerogative of the researcher developing a specific regression model, who uses for this purpose the corresponding theoretical and substantive considerations arising from the meaning of the independent variables involved. The obtained values of the Boolean variables indicate the order of operation of the external and internal maxima in the considered nested model. An illustrative example has been solved.

Ключевые слова: регрессионная модель, однородная вложенная кусочно-линейная регрессия второго типа, оценивание параметров, метод наименьших модулей, задача линейно-булева программирования.

Key words: regression model, homogeneous nested piecewise linear regression of the second type, parameter estimation, least absolute value method, linear Boolean programming problem.

УДК 519.852

Введение. При разработке математических моделей сложных систем, в том числе регрессионного типа, наряду с линейными часто используются разного рода нелинейные модельные конструкции, которые могут иметь весьма специфическую форму. Так, в работе [1] предложена нелинейная регрессионная модель для аппроксимации кривой мощности ветряных турбин, которая выделяется несколькими преимуществами, такими как соответствие физическим свойствам ветряной турбины (кривая мощности не превышает наивысшего значения генерируемой мощности), меньшее количество параметров для оценки, зависимость только от одного фактора. В [2] для оценки хрупкости горных пород использовалась нелинейная множественная регрессионная модель. Исходными данными послужили результаты лабораторных испытаний горных пород (проникновение удара, прочность на одноосное сжатие, прочность на растяжение и удельный вес породы), проведённых в Институте механики Земли Горной школы Колорадо в США на образцах горных пород, собранных из 48 туннелей по всему миру. Исследование [3] посвящено использованию модели множественной нелинейной регрессии для прогнозирования краткосрочных нагрузок в системах охлаждения общественных зданий. Ключевые переменные в модели выбираются на основе анализа чувствительности, а для повышения точности прогнозирования применяются методы калибровки. В статье [4] разработан генетический алгоритм на основе полного факторного экспериментального плана, который хорошо справляется с тестовыми задачами даже для относительно больших интервалов параметров. На основе анализа сходимости алгоритма отмечается, что параметры нелинейной регрессии, которые оказывают более сильное влияние на сумму квадратов ошибок, сходятся гораздо быстрее к своим оптимальным значениям. В [5] представлены различные методы оценки большой выборки для нелинейной регрессионной модели. Эти методы основаны на предварительных тестах значимости и правиле Джеймса – Стейна. Свойства методов изучаются при оценке коэффициентов регрессии в модели множественной нелинейной регрессии, когда априори предполагается, что на них могут быть наложены некоторые ограничения.

В работе [6] предлагаются адаптивная сетевая модель нечёткой системы вывода и три оптимизированные нелинейные регрессионные модели для прогнозирования модуля упругости обычного и высокопрочного бетона. Оптимальные значения параметров для этих моделей определяются с помощью алгоритма дифференциальной эволюции. В статье [7] рассматриваются нелинейные регрессионные модели, когда переменные не могут наблюдаться напрямую, но измеряются как с мультипликативными, так и с аддитивными ошибками измерения искажения. Предлагаются методы оценки условной дисперсии и условной средней калибровки для таких переменных, а также нелинейный метод наименьших квадратов для оценки параметров. В исследовании [8] предлагаются модификации модели логистической регрессии температуры ручья, которые не требуют никаких дополнительных переменных, которые было бы трудно измерить. Предлагаемые подходы тестируются на шести реках, расположенных в различных орографических условиях умеренных климатических зон Европы и США. В [9] рассматривается использование стохастических алгоритмов для оценки параметров нелинейных регрессионных моделей с привлечением нескольких критериев их качества: остаточной суммы квадратов, суммы абсолютных отклонений и суммы усечённых квадратов.

Следует также отметить работы: [10] (порождение и выбор нелинейных регрессионных моделей), [11] (численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений), [12] (проблема автоматического построения и упрощения нелинейных регрессионных моделей), [13] (модели нелинейной функционально-факторной регрессии), [14] (локально-адаптивные регрессионные модели с треугольными индикаторными функциями), [15] (нелинейные адаптивные регрессионные модели).

Целью настоящей работы является разработка алгоритмического способа оценивания неизвестных параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии второго типа, предложенной ранее одним из авторов.

Идентификация параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии второго типа. Рассмотрим регрессионное уравнение (модель) общего вида:

$$y_k = F(a; x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{km}) + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где k – номер наблюдения; n – их количество; y – зависимая переменная; $x_i, i = \overline{1,m}$ – независимые переменные; a – вектор подлежащих идентификации параметров; F – вещественная аппроксимирующая функция, в общем случае нелинейная; ε_k – ошибки аппроксимации. Будем полагать все переменные модели (1) детерминированными.

Функция F может быть как линейной, так и существенно нелинейной, даже не гладкой. Так, в работах [16; 17] введены так называемые вложенные кусочно-линейные регрессионные модельные формы

$$y_k = \min\{\min_{i\in I}\{\alpha_i x_{ki}\}, \max_{i\in J}\{\beta_i x_{ki}\}\} + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1,n}; \tag{2}$$

$$y_k = \max\{\min_{i\in I}\{\alpha_i x_{ki}\}, \max_{i\in J}\{\beta_i x_{ki}\}\} + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1,n}; \tag{3}$$

$$y_k = \min\{\min_{i\in I^1}\{a_i^1 x_{ki}\}, \ldots, \min_{i\in I^G}\{a_i^G x_{ki}\}\} + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1,n}; \tag{4}$$

$$y_k = \max\{\max_{i\in J^1}\{\beta_i^1 x_{ki}\}, \ldots, \max_{i\in J^H}\{\beta_i^H x_{ki}\}\} + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Индексные множества $I, J, I^i, i = \overline{1,G}, \ J^j, j = \overline{1,H}$ представляют собой подмножества множества номеров независимых переменных $\{1,2,\ldots,m\}$. Заметим, что допускается вхождение некоторых из них одновременно в несколько этих индексных множеств. Формирование их состава является исключительной прерогативой разрабатывающего конкретную регрессионную модель исследователя, который использует для этого соответствующие теоретические и содержательные соображения, вытекающие из смысла независимых переменных.

Как указано в работе [16], в моделях (2) – (5) задействован первый порядок вложенности. Он может быть также вторым, третьим и т. д.

В работах [18; 19] представлены алгоритмы оценивания неизвестных параметров простой (2) и однородной (4) вложенных кусочно-линейных регрессий первого типа для случая, когда функция потерь имеет вид

$$L(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k| \to \min, \tag{6}$$

т. е. соответствует методу наименьших модулей (МНМ). Эти задачи сводятся к задачам линейно-булева программирования (ЛБП).

Применим приёмы такого сведения по отношению к задаче оценивания параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессионной модели второго типа (5). Введём следующие обозначения:

$$v_{kj} = \max_{i\in J^j}\{\beta_i^j x_{ki}\}, k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,H},$$

$$w_k = \max_{j=\overline{1,H}} v_{kj}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Тогда задача определения параметров $\beta_i^j, i \in J^j, j = \overline{1,H}$ в соответствии с функцией потерь (6) сводится к следующей задаче линейно-булева программирования:

$$v_{kj} \geq \beta_i^j x_{ki}, \ k = \overline{1,n}, \ i \in J^j, \ j = \overline{1,H}, \tag{7}$$

$$\beta_i^j x_{ki} - v_{kj} \geq (s_{kij} - 1)M_1, k = \overline{1,n}, i \in J^j, \ j = \overline{1,H}, \tag{8}$$

$$\sum_{i\in J^j} s_{kij} = 1, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,H}, \tag{9}$$

$$w_k \geq v_{kj},\ k = \overline{1,n}, j = \overline{1,H}, \tag{10}$$

$$v_{kj} - w_k \geq \left(r_{kj} - 1\right)M_2, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,H}, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{H} r_{kj} = 1, \qquad k = \overline{1,n}, \tag{12}$$

$$w_k + u_k - b_k = y_k, k = \overline{1,n}, \tag{13}$$

$$u_k \geq 0,\ b_k \geq 0, k = \overline{1,n}, \tag{14}$$

$$s_{kij} \in \{0,1\}, k = \overline{1,n}, i \in J^j,\ j = \overline{1,H}, \tag{15}$$

$$r_{kj} \in \{0,1\}, k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,H}, \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k + b_k) - \delta \sum_{j=1}^{H} \sum_{i\in J^j} \beta_i^j \to \min, \tag{17}$$

где δ – заранее назначенное малое положительное число, а M_1 и M_2 – большие положительные константы. Второе слагаемое в целевой функции задачи ЛБП (7) – (17) является условием неполучения лишённого смысла решения.

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть подлежащая обработке выборка данных имеет вид, представленный в табл. 1.

Таблица 1

Выборка данных

$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$
8	4	3	2
9	13	11	7
7	10	2	5
13	4	6	12
4	9	11	3

Таким образом, $n = 5$, $m = 3$.

Индексные множества J^1 и J^2 зададим в виде $J^1 = \{1,2\}$, $J^2 = \{2,3\}$, т. е. положим $H = 2$.

Будем строить однородную вложенную кусочно-линейную регрессию второго типа (5) в форме $y_k = \max\{\max\{\beta_1^1 x_{k1}, \beta_2^1 x_{k2}\}, \max\{\beta_2^2 x_{k2}, \beta_3^2 x_{k3}\}\} + \varepsilon_k,\ \ k = \overline{1,5}$.

В результате решения задачи ЛБП (7)–(17) получим следующую модель:

$$y_k = \max\{\max\{0.69x_{k1}, 0.57x_{k2}\}, \max\{0.57x_{k2}, 1.08x_{k3}\}\} + \varepsilon_k,\ \ k = \overline{1,5}.$$

Приведём значения остальных переменных задачи:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 1\ 0 \\ 1\ 0 \\ 1\ 0 \\ 0\ 1 \\ 1\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 2.77 & 2.17 \\ 9 & 7.58 \\ 6.92 & 5.42 \\ 3.4 & 13 \\ 6.23 & 6.23 \end{pmatrix},$$

$$w = (2.77, 9, 6.92, 13, 6.23),$$

$$u = (5.23, 0, 0.08, 0, 0),$$

$$b = (0, 0, 0, 0, 2.23),$$

$$\sum_{k=1}^{5}(u_k + b_k) = 7.54,$$

где $S_1 = \| s_{ki1} \|$, $k = \overline{1,n}$, $i \in J^1$, $S_2 = \| s_{ki2} \|$, $k = \overline{1,n}$, $i \in J^2$, $R = \| r_{kj} \|$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,H}$, $V = \| v_{kj} \|$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,H}$.

Анализ полученных значений булевых переменных позволяет установить порядок срабатываний внешнего и внутренних максимумов. Например, в четвёртом наблюдении внешний максимум реализовался на втором внутреннем максимуме, который в свою очередь сработал на независимой переменной x_2. Много полезной информации содержат также матрица V и вектора w, u и b.

Заключение. В работе задача вычисления оценок неизвестных параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии второго типа на основе применения метода наименьших модулей сведена к задаче линейно-булева программирования с приемлемой для реальных ситуаций размерностью. При этом значения булевых переменных указывают на порядок срабатывания внешнего и внутренних максимумов в рассматриваемой вложенной модели. Решён численный иллюстративный пример.

ЛИТЕРАТУРА

1. Marčiukaitis, M.; Žutautaitė, I.; Martišauskas, L.; Jokšas, B.; Gecevičius, G.; Sfetsos, A. Non–linear regression model for wind turbine power curve. Renewable Energy, 2017, Vol. 113. – P. 732-741.
2. Yagiz, S.; Gokceoglu, C. Application of fuzzy inference system and nonlinear regression models for predicting rock brittleness. Expert Systems with Applications, 2010, Vol. 37, Iss. 3. – P. 2265-2272.
3. Chengliang, F.; Yunfei, D. Cooling load prediction and optimal operation of HVAC systems using a multiple nonlinear regression model. Energy and Buildings, 2019, Vol. 197. – P. 7-17.
4. Kapanoglu, M.; Ozan, K. I.; Erdogmus, S. Genetic algorithms in parameter estimation for nonlinear regression models: an experimental approach. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2007, Vol. 77, Iss. 10. – P. 851-867.
5. Ejaz, S. A.; Nicol J. C. An application of shrinkage estimation to the nonlinear regression model. Computational Statistics & Data Analysis, 2012, Vol. 56, Iss. 11. – P. 3309-3321.
6. Ahmadi–Nedushan, B. Prediction of elastic modulus of normal and high strength concrete using ANFIS and optimal nonlinear regression models. Construction and Building Materials, 2012, Vol. 36. – P. 665-673.
7. Zhang, J.; Lin, B.; Li, G. Nonlinear regression models with general distortion measurement errors. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2019, Vol. 89, Iss. 8. – P. 1482-1504.
8. Piotrowski, A.P.; Napiorkowski, J. J. Simple modifications of the nonlinear regression stream temperature model for daily data. Journal of Hydrology, 2019, Vol. 572. – P. 308-328.
9. Křivý, I.; Tvrdík, J.; Krpec, R. Stochastic algorithms in nonlinear regression. Computational Statistics & Data Analysis, 2000, Vol. 33, Iss. 3. – P. 277-290.
10. Стрижов, В. В. Алгоритм выбора нелинейных регрессионных моделей с анализом гиперпараметров / В. В. Стрижов, Р. А. Сологуб // Математические методы распознавания образов. – 2009. – Т. 14. – № 1. – С. 184-187.
11. Зотеев, В. Е. Численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений / В. Е. Зотеев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т. 22. – № 4. – С. 669-701.

12. Сологуб, Р. А. Методы трансформации моделей в задачах нелинейной регрессии / Р. А. Сологуб // Машинное обучение и анализ данных. – 2015. – Т. 1. – № 14. – С. 1961-1976.
13. Антонов, В. А. Построение и оптимизация моделей нелинейной функционально-факторной регрессии / В. А. Антонов // Информационные технологии. – 2013. – № 5. – С. 17-24.
14. Попов, А. А. Идентификация локально-адаптивных регрессионных моделей с треугольными индикаторными функциями / А. А. Попов // Системы анализа и обработки данных. – 2023. – № 2 (90). – С. 7-22.
15. Лукашин, Ю. П. Адаптивная эконометрика. Нелинейные адаптивные регрессионные модели / Ю. П. Лукашин // Вопросы статистики. – 2006. – № 6. – С. 37-45.
16. Носков, С. И. Подход к формализации вложенной кусочно-линейной регрессии / С. И. Носков // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2023. – № 1-2 (76). – С. 218-220.
17. Носков, С. И. Некоторые формы вложенной кусочно-линейной регрессии / С. И. Носков // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – № 3. – С. 467-469.
18. Носков, С. И. Идентификация параметров простой формы вложенной кусочно-линейной регрессии / С. И. Носков // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2023. – № III (67). – С. 57-61.
19. Носков, С. И. Вычисление оценок параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии / С. И. Носков, С. И. Белинская // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2023. – Т. 50. – № 4. – С. 115-120.